Dynamique et transport au voisinage d'une transition de phase quantique en dimension deux

Félix Rose

Directeur de thèse : Nicolas Dupuis

Laboratoire de physique théorique de la matière condensée,
Université Pierre et Marie Curie

Soutenance de thèse

19 Septembre 2017

Introduction : pourquoi s'intéresser aux QPTs ?

Transitions de phases (continues) classiques : bien comprises. (Landau, Kadanoff, Wilson)

- Théorie de Landau : paramètre d'ordre et symétrie brisée.
- Champ moyen (en général) incorrect.
- Physique universelle ! Ex. : équation d'état (Widom) : $H = M^{\delta} f(tM^{-1/\beta})$.

Quid des transitions de phase quantiques (QPT) à $T = 0$?

Changement qualitatif de l'état fondamental ; annulation d'un gap.

Transition à $T = 0$

$\rightarrow$ physique modifiée à $T > 0$

Ex. : métaux « étranges »

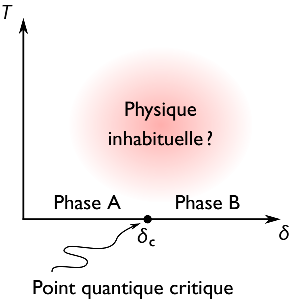
Introduction : pourquoi s'intéresser aux QPTs ?

Transitions de phases (continues) classiques : bien comprises. (Landau, Kadanoff, Wilson)

- Théorie de Landau : paramètre d'ordre et symétrie brisée.
- Champ moyen (en général) incorrect.
- Physique universelle ! Ex. : équation d'état (Widom) : $H = M^{\delta} f(tM^{-1/\beta})$.

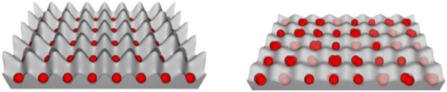
Quid des transitions de phase quantiques (QPT) à $T = 0$?
Changement qualitatif de l'état fondamental ; annulation d'un gap.

Transition à $T = 0$
$\rightarrow$ physique modifiée à $T > 0$
Ex. : métaux « étranges »



Exemple expérimental : transition isolant de Mott-superfluide

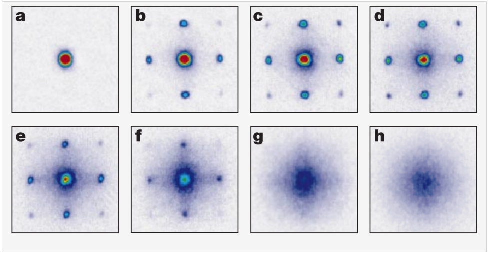
Bosons dans un réseau optique :



Isolant

Superfluide

Mesure de la cohérence du condensat par interférence :



De (a) vers (h) : la profondeur du potentiel augmente.

[Greiner et coll., Nature ’02]

Décrire les QPTs

On se restreint aux QPTs du second ordre, pour lesquelles à la transition :

- la longueur de corrélation ξ diverge ;
- le gap d'excitations Δ s'annule.

On s'intéresse à la physique de basse énergie → théories des champs.

Le formalisme de l'intégrale de chemin permet de réécrire la fonction de partition.

Seconde quantification

Opérateurs $\hat{H}, \hat{\psi}(\mathbf{r})^\dagger, \hat{\psi}(\mathbf{r})$

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}}$$

Formulation en intégrale de chemin

Champs complexes $\psi(\mathbf{r}, \tau)$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\psi^*, \psi]\, e^{-S[\psi^*, \psi]}$$

Lien avec la théorie statistique des champs

$$\hat{H}[\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}] \to S[\psi^*, \psi] = \int_0^{\hbar\beta} \mathrm{d}\tau \left\{ H[\psi^*, \psi] + \int \mathrm{d}^d \mathbf{r}\, \psi^* \partial_\tau \psi \right\}.$$

Conditions aux limites périodiques (PBC) : $\psi(\mathbf{r}, \tau + \hbar\beta) = \psi(\mathbf{r}, \tau)$.

- Problème quantique en dimension d → théorie des champs classique en $d + 1$.
- Coût : introduction d'un temps imaginaire $\tau \in [0, \hbar\beta]$.
- QPT ≡ transition de phase dans le modèle classique.
  → propriétés des transitions classiques : classes d'universalité, lois d'échelle...

Ex : pour une théorie $2d$, la pression et la conductivité se comportent comme

$$P(T) - P(T = 0) \propto T^{2+z} \mathcal{F}\left(\frac{k_B T}{\Delta}\right), \qquad \sigma(\omega, T) = \frac{e^2}{h} \Sigma\left(\frac{\omega}{\Delta}, \frac{k_B T}{\Delta}\right)$$

avec $\mathcal{F}(x)$ et $\Sigma(x, y)$ des fonctions d'échelle universelles.

Le modèle O(N) quantique

Action invariante de Lorentz, avec $\boldsymbol{\varphi}$ un champ réel à N composantes (~ modèle φ^4).

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int_0^{\hbar\beta} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\boldsymbol{\varphi})^2 + \frac{1}{2c_0^2} (\partial_\tau \boldsymbol{\varphi})^2 + r_0 \boldsymbol{\varphi}^2 + u_0 (\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \right\}$$

- Couplages indépendants de la température.
- Action effective décrivant plusieurs transitions :

  $N = 1$: modèle d'Ising en champ transverse ;

  $N = 2$: bosons dans un réseau optique ; transition supraconducteur-isolant ;

  $N = 3$: antiferro-aimants quantiques.

À $T = 0$ le modèle est équivalent au modèle O(N) classique en $d + 1$.

Diagramme de phase à $T = 0$:

Symétrie O(N) spontanément brisée.

Le modèle O(N) quantique

Action invariante de Lorentz, avec $\boldsymbol{\varphi}$ un champ réel à N composantes (~ modèle φ^4).

$$S[\boldsymbol{\varphi}] = \int_0^{\hbar\beta} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\boldsymbol{\varphi})^2 + \frac{1}{2c_0^2} (\partial_\tau \boldsymbol{\varphi})^2 + r_0 \boldsymbol{\varphi}^2 + u_0 (\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \right\}$$

- Couplages indépendants de la température.
- Action effective décrivant plusieurs transitions :

  $N = 1$: modèle d'Ising en champ transverse ;

  $N = 2$: bosons dans un réseau optique ; transition supraconducteur-isolant ;

  $N = 3$: antiferro-aimants quantiques.

À $T = 0$ le modèle est équivalent au modèle O(N) classique en $d + 1$.

Diagramme de phase à $T = 0$:

r_0

Phase ordonnée, $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle \neq 0$ r_{0c} Phase désordonnée, $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$

Symétrie O(N) spontanément brisée.

Diagramme de phase qualitatif à température finie en $2d$

Pour $T > 0$, pas de QPT, mais plusieurs régimes distincts :

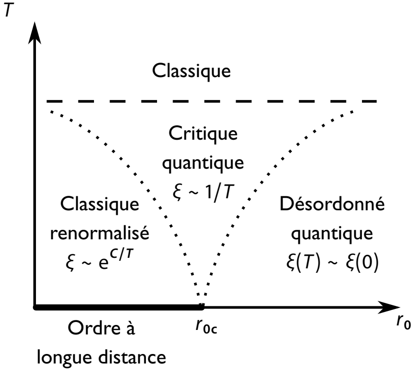


Diagramme typique en $2d$ ($N \geq 3$).

- Échelles d'énergie : T et gap $\Delta(T = 0)$.
- Lignes de passage : $T \sim \Delta \sim |\delta r_0|^{\nu}$.
- Pour $N = 1$ ou 2 présence d'une phase « ordonnée » pour $T > 0$.

Plan de la présentation

Objectif : propriétés universelles du modèle $O(N)$ quantique en deux dimensions au voisinage de son point critique.

I Technique : le groupe de renormalisation non perturbatif (NPRG).

II Thermodynamique du modèle.

III Mode d'amplitude de « Higgs ».

IV Fonctions d'échelle universelles de la conductivité.

Approches complémentaires :

- Analytiques : holographie, théorie des champs conforme, bootstrap conforme.
- Numériques : Monte-Carlo, diagonalisation exacte.

Pourquoi aller au delà de la théorie des perturbations ?

Rôle crucial de la dimension :

- $d + 1 \geqslant 4 \rightarrow$ champ moyen qualitativement correct ; (point fixe Gaussien)
- $d = 2 \rightarrow$ régime de couplage fort. (point fixe de Wilson-Fisher, non Gaussien)

Théories perturbatives insuffisantes.

$\rightarrow$ besoin d'une approche non perturbative : le NPRG

Une brève introduction au NPRG

Le groupe de renormalisation non perturbatif : philosophie

Objet central : l'action effective (énergie libre de Gibbs) $\Gamma[\Phi \equiv \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle]$).

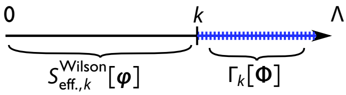
Γ : transformée de Legendre de l'énergie libre $\ln \mathcal{Z}$.

$$\mathcal{Z}[\mathbf{J}] = \int \mathcal{D}[\boldsymbol{\varphi}] \exp\left(-S[\boldsymbol{\varphi}] + \int_x \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right), \qquad \Gamma[\Phi] = -\ln \mathcal{Z}[\mathbf{J}] + \int_x \mathbf{J} \cdot \Phi.$$

Vertex $\Gamma^{(n)} \equiv \delta^n \Gamma / \delta \Phi^n$ → informations sur le système :

- $\Gamma[\Phi(\mathbf{x}) = \text{const.}] = U$: potentiel → thermodynamique (Φ extrémise Γ).
- $\Gamma^{(2)} = [G]^{-1}$: inverse du propagateur.

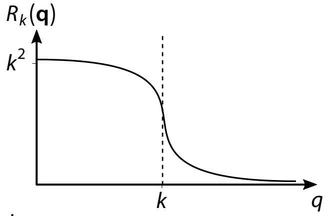
NPRG ~ RG à la Wilson :
degrés de liberté intégrés progressivement.



Le groupe de renormalisation non perturbatif : en pratique

On ajoute à l'action un terme de « masse »

$$S \to S_k = S + \Delta S_k,$$
$$\Delta S_k[\Phi] = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) \cdot R_k(\mathbf{q})\Phi(\mathbf{q}).$$



R_k donne une grande masse aux modes d'impulsion $\lesssim k$.

Nouvelle action effective dépendant de k : $\Gamma \to \Gamma_k$.

- $k = \Lambda$: les fluctuations sont gelées et le champ moyen est exact, $\Gamma_\Lambda = S$.
- $k = 0$: toutes les fluctuations sont prises en compte, $\Gamma_{k=0} = \Gamma$.

Équation de flot exacte

$$\partial_k \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\partial_k R_k \left(\Gamma_k^{(2)}[\Phi] + R_k\right)^{-1}\right\}$$

[Wetterich, PLB '93]

[Morris, IJMP '94]

[Ellwanger, ZPC '94]

Le groupe de renormalisation non perturbatif : approximation

Idée la plus simple : le développement dérivatif (DE).

$$\textit{Ansatz} : \Gamma_k[\Phi] = \int_{\mathbf{x}} \frac{Z_k(\Phi^2)}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 + U_k(\Phi^2) + \frac{Y_k(\Phi^2)}{4}(\Phi \cdot \partial_\mu \Phi)^2.$$

- Non perturbatif ; reproduit la théorie des perturbations (1 boucle).
- EDPs couplées pour U_k, Z_k et Y_k : soluble numériquement.
- En principe uniquement valide pour les petites impulsions.

Autre exemple : le schéma Blaizot-Mendéz–Galain-Wschebor (BMW) où les vertex de grand ordre $\Gamma^{(3)}$, $\Gamma^{(4)}$, ... sont approximés → équation fermée pour $\Gamma^{(2)}(\mathbf{p}, \Phi)$.

[Blaizot et coll., PRE '06] [Benitez et coll., PRE '09]

Bons résultats à impulsion finie !

Exposants critiques du modèle d'Ising en $D = 3$:

	NPRG DE	NPRG BMW	Bootstrap
ν	0.6307	0.632	0.629971(4)
η	0.0443	0.039	0.036298(2)

Le groupe de renormalisation non perturbatif : approximation

Idée la plus simple : le développement dérivatif (DE).

$$\textit{Ansatz} : \Gamma_k[\Phi] = \int_{\mathbf{x}} \frac{Z_k(\Phi^2)}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 + U_k(\Phi^2) + \frac{Y_k(\Phi^2)}{4}(\Phi \cdot \partial_\mu \Phi)^2.$$

- Non perturbatif ; reproduit la théorie des perturbations (1 boucle).
- EDPs couplées pour U_k, Z_k et Y_k : soluble numériquement.
- En principe uniquement valide pour les petites impulsions.

Autre exemple : le schéma Blaizot-Mendéz–Galain-Wschebor (BMW) où les vertex de grand ordre $\Gamma^{(3)}$, $\Gamma^{(4)}$, ... sont approximés → équation fermée pour $\Gamma^{(2)}(\mathbf{p}, \Phi)$.

[Blaizot et coll., PRE '06] [Benitez et coll., PRE '09]

Bons résultats à impulsion finie !

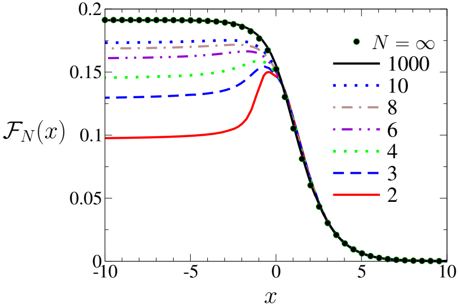
Exposants critiques du modèle d'Ising en $D = 3$:

	NPRG DE	NPRG BMW	Bootstrap
ν	0.6307	0.632	0.629971(4)
η	0.0443	0.039	0.036298(2)

II Thermodynamique

Fonction d'échelle de la pression

Détermination (via DE) de la fonction d'échelle universelle de la pression.



$$P(T) = P(T=0) + N\frac{(k_\mathrm{B}T)^3}{(\hbar c)^2}\mathcal{F}_N(x),$$

$$x = \begin{cases} \Delta/k_\mathrm{B}T \text{ si à } T=0 \text{ désordonné,} \\ -\Delta/k_\mathrm{B}T \text{ si à } T=0 \text{ ordonné.} \end{cases}$$

[Rançon et coll., PRE '13].

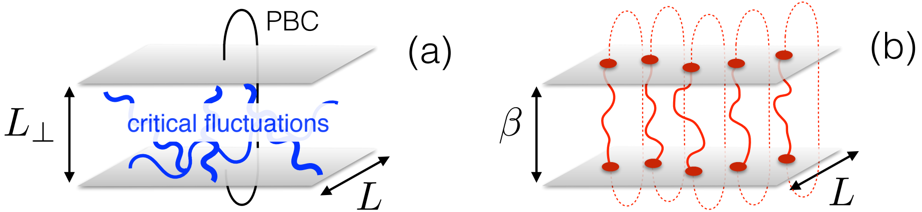
- Désordonné quantique : gap fini, $\mathcal{F}_N(x\to\infty)$ s'annule exponentiellement.
- Classique renormalisé : $(N-1)$ « Goldstones », $\mathcal{F}_N(x\to-\infty) = \frac{N-1}{N}\frac{\zeta(3)}{2\pi}$.
- $\mathcal{F}_N(x)$ non monotone dans le régime critique quantique !

Mesurable dans des gaz de bosons piégés dans des réseaux optiques.

Lien avec les forces de Casimir critiques

Théorie classique confinée selon direction $L_\perp$ ≡ théorie quantique à $T > 0$! ($L_\perp \equiv 1/T$)

$$S_{\mathrm{cl.}} = \int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}_{||} \int_0^{L_\perp} \mathrm{d}x_\perp \, \mathcal{H}, \qquad S_{\mathrm{qu.}} = \int \mathrm{d}^d\mathbf{r} \int_0^{\hbar\beta} \mathrm{d}\tau \, \mathcal{H}.$$



Ex : les fonctions d'échelle de la densité d'énergie interne du modèle 2d quantique et des forces de Casimir critiques d'un modèle 3D classique avec PBC sont identiques !

$$\text{Force de Casimir : } f(L_\perp, \xi) \sim L_\perp^{-D}\theta(L_\perp/\xi).$$

$$\text{Densité d'énergie interne : } \epsilon(T) - \epsilon(T=0) \sim T^{d+1}\theta(\Delta/k_B T)$$

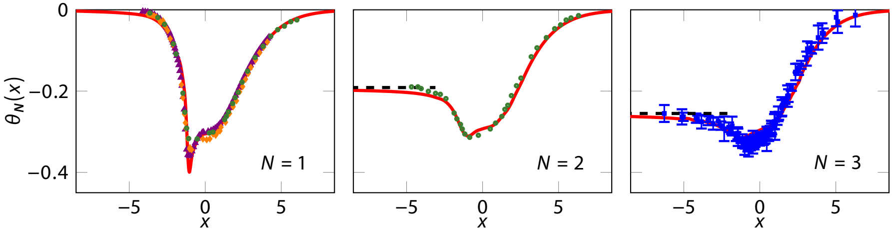
(Forces de Casimir critiques : [Fisher et de Gennes, C.R. Acad. Sci. '78]) ξ : longueur de corrélation.

Comparaison avec des simulations classiques

Fonction d'échelle de la densité d'énergie interne :

$$\epsilon(T) = \epsilon(T=0) - \frac{(k_\mathrm{B}T)^3}{(\hbar c)^2}\theta_N\left(\frac{\Delta}{k_\mathrm{B}T}\right).$$

De gauche à droite : $\theta_N(x)$ pour Ising, XY, Heisenberg. [Rançon, **Rose** et coll., PRB '16].



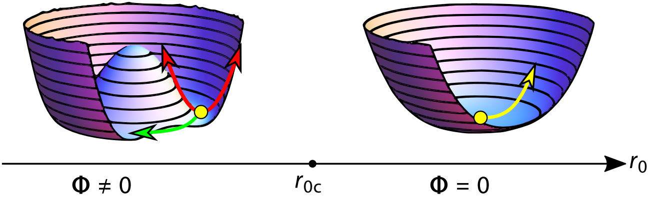
- Lignes : NPRG ; points : Monte-Carlo pour des spins $3D$ classiques avec PBC.
- Intêret expérimental pour les simulations classiques avec PBC.

III Mode d'amplitude « de Higgs »

Dynamiques : excitations au niveau du champ moyen en $2d$

$$U(\Phi) = r_0\Phi^2 + u_0(\Phi^2)^2$$

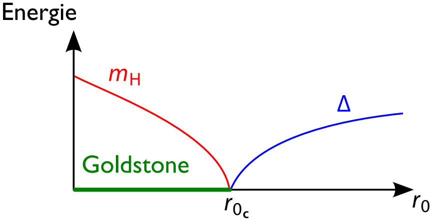
Diagramme de phase à $T = 0$ (en champ moyen) :



$N-1$ modes de Goldstone

\+ mode d'amplitude (gap m_H).

N modes gappés (gap Δ).



Champ moyen :

$$\Delta = A\left|r_0 - r_{0_c}\right|^{1/2}$$

$$m_H = A\sqrt{2}\left|r_0 - r_{0_c}\right|^{1/2}$$

$$\rightarrow m_H/\Delta = \sqrt{2}.$$

Au delà de l'approximation Gaussienne

Question : qu'advient-il du mode d'amplitude « de Higgs » au delà du champ moyen ?

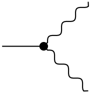
- Demeure-t-il un mode d'excitation bien défini ?
- Que se passe-t-il près du point critique ? Que vaut m_{H}/Δ ?

> "In general, this Higgs particle can decay into multiple lower-energy spin waves. It has been argued that such decay processes dominate for $d < 3$, and the Higgs particle is therefore not a stable excitation."

[Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 2nd. ed]

Émission de bosons de Goldstone → divergence IR de la susceptibilité longitudinale.

[Patasinskij et coll., JETP '73], [Zwerger, PRL '04], [Dupuis, PRE '11], ...

Couplage longitudinal-transverse : 

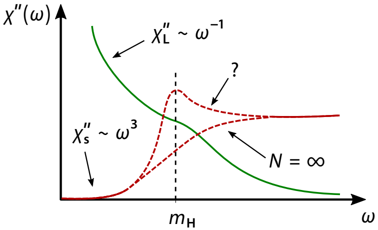
Fonction de réponse scalaire

Solution : considérer une autre fonction de réponse. [Podolsky, Auerbach et Arovas, PRB '11]

Sonde pertinente : susceptibilité scalaire.

$$\chi_s(\mathbf{r},\tau) = \left\langle \boldsymbol{\varphi}^2(\mathbf{r},\tau)\boldsymbol{\varphi}^2(0,0)\right\rangle,$$

$$\chi_s''(\omega) = \mathrm{Im}[\chi_s(\mathbf{q}=0, i\omega_n \to \omega + i0^+)].$$



Pour calculer la fonction à 4 points, on introduit une source supplémentaire,

$$S \to S[\mathbf{J}, h] = S + \int d^{d+1}x\, \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi} + \int d^{d+1}x\, h\boldsymbol{\varphi}^2.$$

L'action effective $\Gamma[\Phi, h]$ est la transformée de Legendre par rapport à $\mathbf{J}$ mais pas h.

$$\chi_s(\omega) = -\Gamma^{(0,2)}(\omega) + \left(\Gamma^{(2,0)}(\omega)\right)^{-1}\left(\Gamma^{(1,1)}(\omega)\right)^2, \qquad \Gamma^{(n,m)} = \left.\frac{\delta^{n+m}\Gamma}{\delta^n\Phi\delta^m h}\right|_{h\to 0}.$$

Approximation BMW étendue au calcul de $\chi_s(\omega)$ (dépendance complète en fréquences).

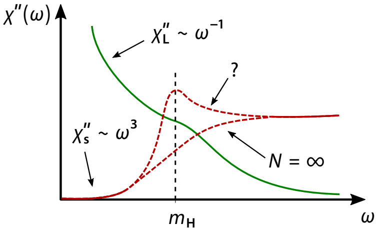
Fonction de réponse scalaire

Solution : considérer une autre fonction de réponse. [Podolsky, Auerbach et Arovas, PRB '11]

Sonde pertinente : susceptibilité scalaire.

$$\chi_s(\mathbf{r},\tau) = \left\langle \boldsymbol{\varphi}^2(\mathbf{r},\tau)\boldsymbol{\varphi}^2(0,0)\right\rangle,$$

$$\chi_s''(\omega) = \mathrm{Im}[\chi_s(\mathbf{q}=0, i\omega_n \to \omega + i0^+)].$$



Pour calculer la fonction à 4 points, on introduit une source supplémentaire,

$$S \to S[\mathbf{J}, h] = S + \int \mathrm{d}^{d+1}x\, \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi} + \int \mathrm{d}^{d+1}x\, h\boldsymbol{\varphi}^2.$$

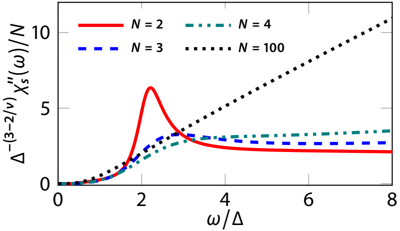
L'action effective $\Gamma[\Phi, h]$ est la transformée de Legendre par rapport à $\mathbf{J}$ mais pas h.

$$\chi_s(\omega) = -\Gamma^{(0,2)}(\omega) + \left(\Gamma^{(2,0)}(\omega)\right)^{-1}\left(\Gamma^{(1,1)}(\omega)\right)^2, \qquad \Gamma^{(n,m)} = \left.\frac{\delta^{n+m}\Gamma}{\delta^n\Phi\delta^m h}\right|_{h\to 0}.$$

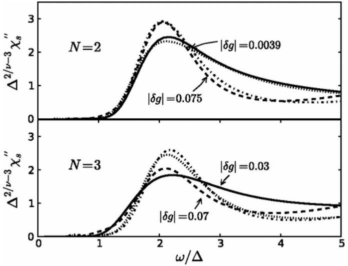
Approximation BMW étendue au calcul de $\chi_s(\omega)$ (dépendance complète en fréquences).

Résultats and comparaison

NPRG BMW [**Rose**, Léonard et Dupuis, PRB '15] :



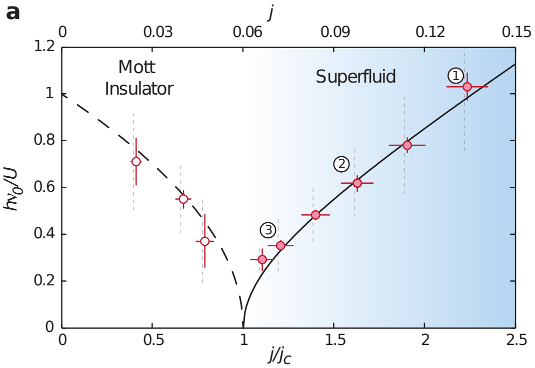
QMC [Gazit, Podolsky et Auerbach PRL '13] :



Ratio m_H/Δ		$N = 3$	$N = 2$
Champ moyen		$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
QMC	(Chen et coll.)		3.3(8)
QMC	(Gazit et coll.)	2.2(3)	2.1(3)
RG $3-\epsilon$	(Katan et coll.)	1.64	1.67
NPRG BMW		$\simeq 2.7$	$\simeq 2.2$
QMC	(Löhofer et coll.)	2.6(4)	
Diag. exacte	(Nishiyama)	2.7(7)	2.1(2)

Observation expérimentale

Observation dans un gaz de bosons : [Endres et coll., Nature '12]



Autres systèmes :

- Antiferro-aimants $2d$ (spectroscopie Raman) (Jain, Souliou, Hong).
- BEC couplé à de la lumière ($d = \infty$) [Léonard et coll., '17].

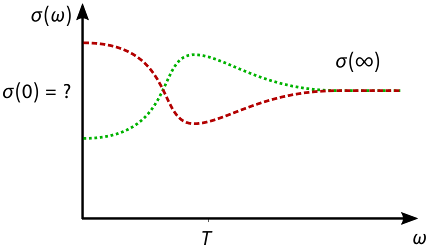
Restent à observer : rapport m_H/Δ, fonction spectrale complète...

IV Transport

Conductivité : introduction

Graal : déterminer le transport dans le régime critique quantique pour $\omega \lesssim T$.

2 scénarios possibles :



[Damle et Sachdev, PRB '97]

Difficultés : pas de quasiparticules ; prolongement analytique.

Approches :

- QMC (Sørensen, Chen, Prokof'ev, Pollet, Gazit, Podolsky, Auerbach) ;
- Holographie (Myers, Sachdev, Witzack-Krempa) ;
- CFT (Poland, Sachdev, Simmons-Duffin, Witzack-Krempa) ;
- NPRG (nous !).

Courants et conductivité : définitions

Pour bosons ($N = 2$) : courant $\mathbf{j} \sim i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \sim \varphi_i \varepsilon_{ij} \nabla\varphi_j$, $\begin{cases} \psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \\ \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}. \end{cases}$

Généralisation à $N > 2$:

$$j^a_\mu = \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \partial_\mu \boldsymbol{\varphi},$$

T^a : matrice antisymétrique,

$\{T^a\}$: générateurs infinitésimaux des rotations.

→ $N(N-1)/2$ courants indépendants.

Conductivité = réponse de j^a_μ à un champ externe (champ de jauge $A_\mu = A^a_\mu T^a$)

$$\equiv \left\langle j^a_\mu j^b_\nu \right\rangle.$$

Réponse linéaire

$$K^{ab}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle j^a_\mu(\mathbf{x}) j^b_\nu(\mathbf{x}') \right\rangle - \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left\langle T^a \boldsymbol{\varphi} \cdot T^b \boldsymbol{\varphi} \right\rangle$$

$$\sigma^{ab}_{\mu\nu}(i\omega_n) = -\frac{1}{\omega_n} K^{ab}_{\mu\nu}(p_x = 0, p_y = 0, p_z = i\omega_n)$$ tenseur de conductivité

Courants et conductivité : définitions

Pour bosons ($N = 2$) : courant $\mathbf{j} \sim i(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \sim \varphi_i \varepsilon_{ij} \nabla\varphi_j$, $\begin{cases} \psi = \varphi_1 + i\varphi_2, \\ \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}. \end{cases}$

Généralisation à $N > 2$:

$$j^a_\mu = \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \partial_\mu \boldsymbol{\varphi},$$

T^a : matrice antisymétrique,

$\{T^a\}$: générateurs infinitésimaux des rotations.

→ $N(N-1)/2$ courants indépendants.

Conductivité = réponse de j^a_μ à un champ externe (champ de jauge $A_\mu = A^a_\mu T^a$)

$$\equiv \left\langle j^a_\mu j^b_\nu \right\rangle.$$

Réponse linéaire

$$K^{ab}_{\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \left\langle j^a_\mu(\mathbf{x}) j^b_\nu(\mathbf{x}') \right\rangle - \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \left\langle T^a\boldsymbol{\varphi} \cdot T^b\boldsymbol{\varphi} \right\rangle$$

$$\sigma^{ab}_{\mu\nu}(i\omega_n) = -\frac{1}{\omega_n} K^{ab}_{\mu\nu}(p_x = 0, p_y = 0, p_z = i\omega_n)$$ tenseur de conductivité

Courants et conductivité : définitions

Pour bosons ($N = 2$) : courant $\mathbf{j} \sim \mathrm{i}(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \sim \varphi_i \varepsilon_{ij} \nabla\varphi_j$, $\begin{cases} \psi = \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2, \\ \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}. \end{cases}$

Généralisation à $N > 2$:

$$j^a_\mu = \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \partial_\mu \boldsymbol{\varphi},$$

T^a : matrice antisymétrique,

$\{T^a\}$: générateurs infinitésimaux des rotations.

→ $N(N-1)/2$ courants indépendants.

Conductivité = réponse de j^a_μ à un champ externe (champ de jauge $A_\mu = A^a_\mu T^a$)

$$\equiv \left\langle j^a_\mu j^b_\nu \right\rangle.$$

Réponse linéaire

$$K^{ab}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle j^a_\mu(\mathbf{x}) j^b_\nu(\mathbf{x}') \right\rangle - \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left\langle T^a \boldsymbol{\varphi} \cdot T^b \boldsymbol{\varphi} \right\rangle$$

$$\sigma^{ab}_{\mu\nu}(\mathrm{i}\omega_n) = -\frac{1}{\omega_n} K^{ab}_{\mu\nu}(p_x = 0, p_y = 0, p_z = \mathrm{i}\omega_n)$$ tenseur de conductivité

Conductivité : généralités

T^a : associé à une rotation infinitésimale de $O(N)$.

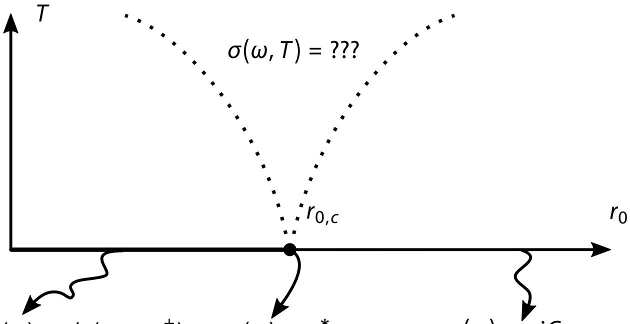
Le tenseur $\sigma^{ab}_{\mu\nu}$:

- est diagonal, $\sigma^{ab}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\delta_{ab}\sigma^{aa}$;
- admet deux composantes, $\sigma^{aa}(\omega) = \begin{cases} \sigma_A(\omega) & \text{si } T^a\Phi \neq 0, \\ \sigma_B(\omega) & \text{si } T^a\Phi = 0; \end{cases}$
- dans la phase désordonnée et au point critique, $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$.

Pour $N = 2$, il y a une seule matrice $T^a_{ij} = \varepsilon_{ij}$ et dans la phase ordonnée $\sigma \equiv \sigma_A$.

Propriétés universelles

Comportement basse fréquence :



$\sigma_A(\omega) \simeq \mathrm{i}/L(\omega + \mathrm{i}0^+)$ $\sigma(\omega) = \sigma^*$ $\sigma(\omega) \simeq -\mathrm{i}C\omega$

$\sigma_B(\omega) = ?$ (peu étudié car n'est défini que pour $N \geq 3$)

σ^*/σ_Q, $C/L\sigma_Q^2$ sont universels ! $(\sigma_Q = e^2/h)$ [Fisher et coll., PRL '89]

Formalisme de l'action effective

$$j_\mu^a = \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}.$$

Difficulté technique : calculer fonctions de corrélation à 4 points $\left\langle j_\mu^a j_\nu^b \right\rangle$.

Idée : la même astuce que pour le « Higgs » : $\Gamma[\Phi] \to \Gamma[\Phi, \mathbf{A}]$ ($\mathbf{A}$ source externe).

$$K_{\mu\nu}^{ab} = -\Gamma_{a\mu,b\nu}^{(0,2)} + \Gamma_{i,a\mu}^{(1,1)} \left(\Gamma^{(2,0)}\right)_{ij}^{-1} \Gamma_{j,b\nu}^{(1,1)} \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^{(n,m)} = \left.\frac{\delta^{n+m}\Gamma}{\delta^n \Phi \delta^m A}\right|_{\mathbf{A}\to 0}.$$

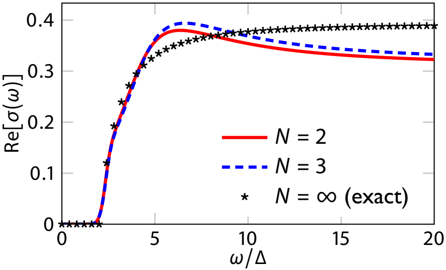
Schéma d'approximation

On implémente un schéma invariant de jauge avec une dépendance en impulsion.
$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$ permet de construire deux termes $\mathcal{O}(A_\mu^2)$:

$$\Gamma_k[\mathbf{\Phi}, \mathbf{A}] = \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}(D_\mu \mathbf{\Phi}) \cdot Z_k(-\mathbf{D}^2)(D_\mu \mathbf{\Phi}) + \frac{1}{4}(\mathbf{\Phi} \cdot \partial_\mu \mathbf{\Phi}) Y_k(-\boldsymbol{\partial}^2)(\mathbf{\Phi} \cdot \partial_\mu \mathbf{\Phi}) + U_k(\rho)$$
$$+ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a X_{1,k}(-\mathbf{D}^2) F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a T^a \mathbf{\Phi} \cdot X_{2,k}(-\mathbf{D}^2) F_{\mu\nu}^b T^b \mathbf{\Phi}.$$

- Préserve l'invariance de jauge [Morris, N. Phys. B '00 ; Bartosh, PRB '13, ...].
- $Z_k(\mathbf{p}^2)$, $Y_k(\mathbf{p}^2)$, $X_{1,k}(\mathbf{p}^2)$, $X_{2,k}(\mathbf{p}^2)$ ont une dépendance non-triviale en impulsion.
- $\sigma(\omega)$ s'exprime simplement en fonction de Z_k, $X_{1,k}$ et $X_{2,k}$.

Résultats



Dépendance complète en fréquence de la conductivité !
(ex. : phase désordonnée)

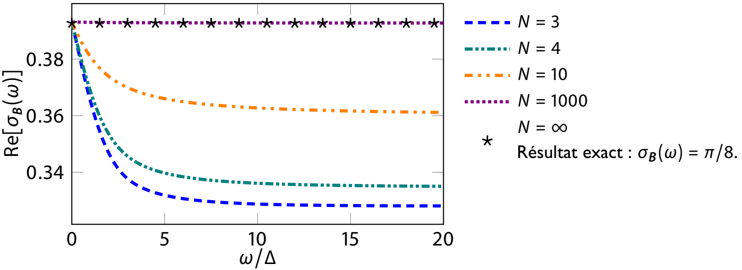
Quantités universelles C/L, σ^* : $(\sigma_Q = e^2/h)$

N	2	3	1000	∞ (exact)
$C/NL\sigma_Q^2$	0.105	0.0742	0.0416	$1/24 \simeq 0.04167$
σ^*/σ_Q	0.3218	0.3285	0.3927	$\pi/8 \simeq 0.3927$

- Valeurs exactes pour $N = \infty$.
- $N = 2$: bon accord avec le MC et le bootstrap (erreur : C/L, 5% ; σ^*, 10%).

Conductivité « superuniverselle » dans la phase ordonnée

Résultat plus surprenant pour $\sigma_B(\omega)$:



$\sigma_B(\omega \to 0)$ ne dépend numériquement pas de N !

$$\boxed{\text{Conjecture : } \sigma_B(\omega \to 0) = \frac{\pi}{8}\sigma_Q \text{ pour tout } N \text{ : « superuniversalité » !}}$$

[**Rose** et Dupuis, PRB '17]

Conclusion

Résumé et conclusion

Le NPRG peut être utilisé pour décrire la dynamique au voisinage d'une QPT et les résultats sont en accord avec les approches complémentaires.

Prédictions obtenues grâce au NPRG :

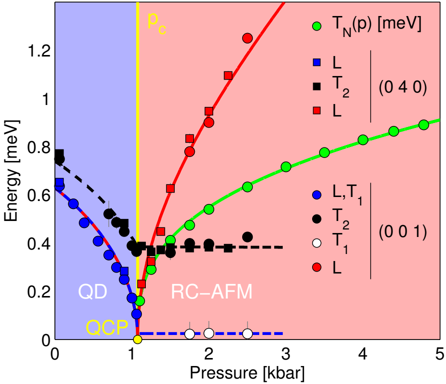
- Fonctions d'échelle de la thermodynamique [Rançon, **Rose** et coll., PRB '16].
- Fonction spectrale du mode d'amplitude [**Rose**, Léonard et Dupuis, PRB '15].
- Conductivité $\sigma_B(\omega \to 0)$ « superuniverselle » [**Rose** et Dupuis, PRB '17].

Perspectives :

- Détermination de σ dans le régime critique quantique, dans la limite $\omega \ll T$ (régime hydrodynamique).

  Schéma sans prolongement analytique numérique (Strodthoff, Pawlowski).
- Autres coefficients de transport : viscosité, conductivité thermique.

Transition paramagnétique-antiferromagnétique :



[Rüegg et coll., PRL '08]

Conductivité : définition

Symétrie $O(N)$ → conservation du moment angulaire L, courant : $\partial_t L + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Champ de jauge non-Abélien : $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$.

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \in \mathrm{so}(N) \qquad T^a : N(N-1)/2 \text{ générateurs, } T^a_{ij} = -T^a_{ji}$$

Densités de courant $J^a_\mu = -\dfrac{\delta S}{\delta A^a_\mu} = j^a_\mu - A^a_\mu \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \boldsymbol{\varphi}$, $\qquad j^a_\mu = \boldsymbol{\varphi} \cdot T^a \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}$

$N = 2$ (bosons) : $\mathbf{j} \sim i(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$, $\quad \psi = \varphi_1 + i\varphi_2$.

Réponse linéaire

$$K^{ab}_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle j^a_\mu(\mathbf{x}) j^b_\nu(\mathbf{x}') \right\rangle - \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left\langle T^a \boldsymbol{\Phi} \cdot T^b \boldsymbol{\Phi} \right\rangle$$

$$\sigma^{ab}_{\mu\nu}(i\omega_n) = -\frac{1}{\omega_n} K^{ab}_{\mu\nu}(p_x = 0, p_y = 0, p_z = i\omega_n)$$ tenseur de conductivité

Vertices expression

Writing the vertices in the most general form, one has

$$\Gamma^{(2,0)}_{ij}(\mathbf{p},\Phi) = \delta_{ij}\Gamma_A + \Phi_i\Phi_j\Gamma_B, \qquad \text{(inverse propagator !)}$$
$$\Gamma^{(1,1)}_{i,a\mu}(\mathbf{p},\Phi) = \mathrm{i}p_\mu(T^a\mathbf{\Phi})_j\Psi_A,$$
$$\Gamma^{(0,2)}_{i,a\mu}(\mathbf{p},\Phi) = \delta_{ab}[p_\mu p_\nu\Psi_B + \delta_{\mu\nu}\bar{\Psi}_B] + (T^a\mathbf{\Phi})\cdot(T^b\mathbf{\Phi})[p_\mu p_\nu\Psi_C + \delta_{\mu\nu}\bar{\Psi}_C],$$

where the Γs and the Ψs are functions of $\mathbf{p}^2$ and $\rho = \mathbf{\Phi}^2/2$.

Ward identities associated with gauge invariance indicates that only $\Gamma_{A,B}$ and $\Psi_{B,C}$ are independent.

Formalisme NPRG

Problème : le régulateur (~ masse) brise l'invariance de jauge :

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) \cdot R_k(\mathbf{q}^2)\Phi(-\mathbf{q}).$$

Comment préserver l'invariance de jauge ?

Solution : rendre le régulateur dépendent de **A** !

[Morris, N. Phys. B '00] [Codello, Percacci et coll., EPJC '16] [Bartosh, PRB '13]

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) \cdot R_k(-\partial_\mu^2)\Phi(\mathbf{x}) \to \Delta S_k[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) \cdot R_k(-D_\mu^2)\Phi(\mathbf{x})$$

Équations de flot modifiées de par la présence de **A**.

RG approximation scheme

Which approximation procedure do we use ?

First idea : BMW to obtain full momentum dependence (as done for the study of the Higgs mode).

Problem : it fails !

- Impossible to close the flow equations rigorously.
- Setting momenta to zero in flow equations breaks down gauge invariance.
- Vertices have a nontrival momenta dependence due to the derivative in j_μ^a...
- ...so it is not possible to close the equations without additional uncontrolled approximations...
- ...which break Ward identities !

RG approximation scheme

Which approximation procedure do we use ?

First idea : BMW to obtain full momentum dependence (as done for the study of the Higgs mode).

Problem : it fails !

- Impossible to close the flow equations rigorously.
- Setting momenta to zero in flow equations breaks down gauge invariance.
- Vertices have a nontrival momenta dependence due to the derivative in j_μ^a...
- ...so it is not possible to close the equations without additional uncontrolled approximations...
- ...which break Ward identities !

LPA''

$$\Gamma_k[\Phi, \mathbf{A}] = \int_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)\cdot Z_k(-\mathbf{D}^2)(D_\mu\Phi) + \frac{1}{4}(\Phi\cdot\partial_\mu\Phi)Y_k(-\partial^2)(\Phi\cdot\partial_\mu\Phi) + U_k(\rho)$$
$$+ \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}X_{1,k}(-\mathbf{D}^2)F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}T^a\Phi\cdot X_{2,k}(-\mathbf{D}^2)F^b_{\mu\nu}T^b\Phi.$$

Expression de la conductivité dans la LPA''

$$\sigma_A(\omega) = 2\rho_0 Z(\omega^2)/(\omega + i0^+) + \omega[X_1(\omega^2) + 2\rho_0 X_2(\omega^2)],$$
$$\sigma_B(\omega) = \omega X_1(\omega^2).$$

$\rho = \Phi^2/2$, $\rho_{0,k}$: minimum du potentiel.

Superuniversalité de σ_B

Origine : physique définie par modes de Goldstone. Action invariante de jauge :

$$\Gamma^{\text{eff}}[\boldsymbol{\pi}, \mathbf{A}] = Z \int_{\mathbf{x}} [(\partial_\mu - A_\mu)\boldsymbol{\pi}]^2 + \cdots$$

Bosons sans interactions → conductivité pour la cl. B calculée via théorème de Wick,

$$\langle jj \rangle \sim \int_{\mathbf{q}} \Gamma^{(2,1)} G_{\mathrm{T}}(\mathbf{q}) \Gamma^{(2,1)} G_{\mathrm{T}}(\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

- Les facteurs Z se compensent.
- Redonne le résultat $N = \infty$.

Bound states – Overview

The bound states of the $3D$ Φ^4 theory have been extensively studied.

MC and FT : Caselle, Hasenbusch et coll. ; Exact diag. : Nishiyama.

In the ordered phase :

- m : mass gap.
- $M < 2m$: BS mass (below the multi-particle continuum).

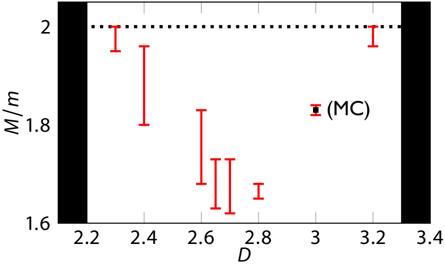
Near the phase transition the ratio M/m is universal !

Need for a momentum-dependent approximation scheme :
Blaizot–Méndez-Galain–Wshebor (closes the flow equation of $\Gamma^{(2)}(\Phi, \mathbf{p})$).

Bound states – Results

After determining $G(\mathbf{p})$ in the Euclidian framework we perform analytic continuation using Padé approximants.

- For $D = 3$ we find the existence of a BS with mass $M/m \sim 1.82$ in agreement with MC.
- We study the dependence of the BS with D.



No BS in $D = 4$ (toy standard model) or 2 (Zamolodchikov).

Error bars : Padé.

[**Rose** et coll., PRB '16]